Chapitre 11

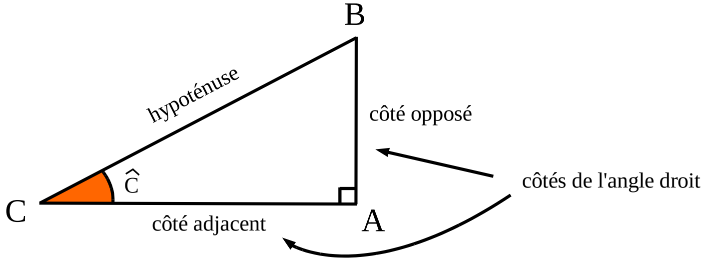
Trigonométrie

11.1 Au collège

11.1.1 Idée fondamentale

Dans le programme en vigueur en 2014-15 [38], c'est en quatrième que l'on définit le cosinus d'un angle aigu, et c'est en troisième que l'on introduit le sinus et la tangente d'un tel angle. Le programme est cependant trompeur car toutes ces notions ne font pas partie du socle commun des connaissances, si bien que l'on peut raisonnablement considérer qu'elles n'auront pas été travaillées par l'immense majorité des élèves qui entrent en seconde.

Au collège, l'idée fondamentale est de définir le cosinus et le sinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle comme le rapport de deux côtés du triangle. Si le triangle ABC est rectangle en A, on définit le côté opposé et le côté adjacent de l'angle aigu $\widehat{C}$ comme sur la figure :



et l'on pose :

$$\cos\widehat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}},$$

$$\sin\widehat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}},$$

$$\tan \widehat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

En d'autres termes, on pose :

Définition 11.1 *Dans un triangle rectangle :*

(1) Le ***cosinus*** *d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.*

(2) Le ***sinus*** *d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.*

(2) La ***tangente*** *d'un angle aigu est égale au quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent à cet angle.*

Les cas limités montrent que $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$, ce que nous admettrons. La question importante à poser maintenant est de savoir si ces définitions ont un sens : a-t-on le droit de poser de telles définitions ?

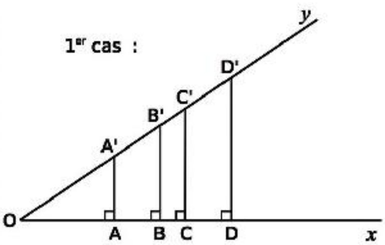
11.1.2 Cosinus d'un angle aigu

Voici une activité de quatrième ([42], p. 188) permettant de justifier la définition du cosinus d'un angle aigu :

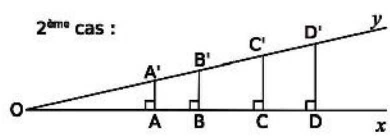
Activité 2 : Cosinus d'un angle aigu

Les perpendiculaires en A, B, C et D à la demi-droite [Ox) coupent la demi-droite [Oy) respectivement en A', B', C' et D'.

1er cas :



2ème cas :



Pour chaque cas :

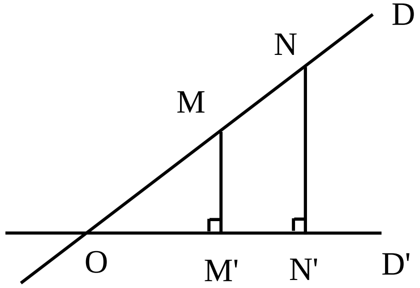
a. Complète le tableau suivant :

OA =	OB =	OC =	OD =
OA' =	OB' =	OC' =	OD' =
$\frac{OA}{OA'}$ =	$\frac{OB}{OB'}$ =	$\frac{OC}{OC'}$ =	$\frac{OD}{OD'}$ =

b. Que dire des rapports $\frac{OA}{OA'}$; $\frac{OB}{OB'}$; $\frac{OC}{OC'}$ et $\frac{OD}{OD'}$? Ces rapports dépendent-ils des points A, B, C et D choisis sur la demi-droite [Ox) ? De quoi dépendent-ils alors ?

c. Mesure l'angle $\widehat{xOy}$ puis tape sur ta calculatrice (fais attention qu'elle soit en mode degrés) cos $\widehat{xOy}$ en remplaçant $\widehat{xOy}$ par la valeur mesurée. Que remarques-tu ?

Une autre activité permet ensuite de démontrer que tous ces rapports envisagés sont égaux. C'est facile puisque nous sommes dans le cas de la figure :



et le Théorème de Thalès donne :

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{ON'}{ON}.$$

Cela montre que le cosinus de l'angle ne dépend pas du choix de M sur la droite D, donc ne dépend pas du triangle OMM' que l'on utilise pour définir ce quotient. Il n'y a donc pas de danger à définir le cosinus de l'angle $\widehat{MOM'}$ par :

$$\cos \widehat{MOM'} = \frac{ON'}{ON}$$

où N est un point quelconque de la demi-droite $[OM)$ et où N' désigne le projeté orthogonal de N sur la droite (OM').

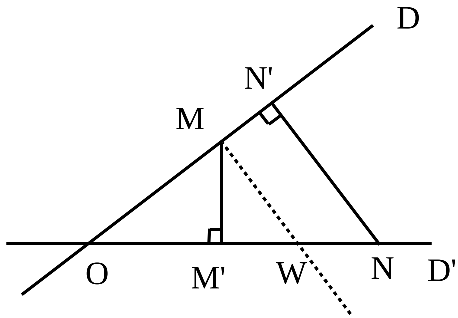
Il y a pourtant une dernière difficulté que l'on passe sous silence dans les manuels de quatrième pour ne pas effrayer les élèves :

> Dans la définition précédente, on a choisi un côté de l'angle $\widehat{MOM'}$, puis un point N sur ce côté, et c'est ce point que l'on a projeté orthogonalement sur l'autre côté de l'angle.
>
> Cette définition dépend donc du choix d'un côté de l'angle (où l'on prend un point N) par rapport à l'autre (sur lequel on projette). C'est ennuyeux parce que le cosinus de l'angle $\widehat{MOM'}$ de doit pas dépendre de ces choix.

En d'autres termes, la définition précédente aura un sens si l'on arrive à démontrer qu'elle ne dépend pas de la manière de projeter sur l'un ou l'autre des côtés de l'angle. Tout revient donc à démontrer le résultat suivant :

Théorème 11.1 *Si D et D' sont deux droites sécantes en O, si $M \in D$ et $N \in D'$, si M' est le projeté orthogonal de M sur D', et si N' est le projeté orthogonal de N sur D, alors :*

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{ON'}{ON}.$$



Preuve — Proposons trois démonstrations différentes.

Première preuve — La perpendiculaire à D issue de M coupe D' en W. Le Théorème de Thalès donne :

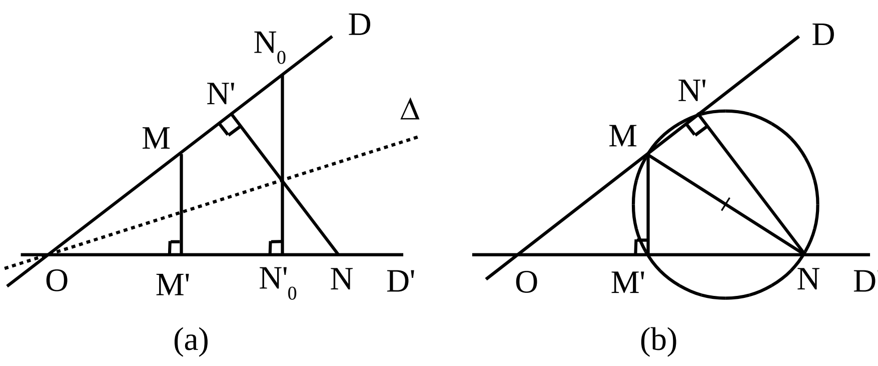
$$\frac{ON'}{ON} = \frac{OM}{OW}.$$

On a donc :

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{ON'}{ON} \Leftrightarrow \frac{OM'}{OM} = \frac{OM}{OW} \Leftrightarrow OM^2 = OM' \times OW.$$

La dernière égalité écrite est vraie puisqu'il s'agit d'une relation métrique dans le triangle rectangle. Cela permet de conclure à l'égalité des rapport.

Deuxième preuve — Traçons la bissectrice Δ du couple de demi-droites $([OM), [OM'))$, comme sur la figure (a) ci-dessous.



Par définition, la réflexion par rapport à Δ échange les demi-droites $[OM)$ et $[OM')$. Elle transforme donc les points N et N' en deux points N_0 et N_0' appartenant respectivement à D et D'.

La conservation des distances par une symétrie axiale donne $ON = ON_0$ et $ON' = ON_0'$. La conservation de l'orthogonalité montre que le triangle ON_0N_0' est rectangle en N_0'. Les droites (MM') et (N_0N_0') sont donc parallèles, et le Théorème de Thalès donne :

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{ON_0'}{ON_0} = \frac{ON'}{ON}.$$

Troisième preuve — Sur la figure (b), *les points* M, M', N, N' sont cocycliques puisqu'ils appartiennent tous au cercle de diamètre $[AM]$. La puissance du point O par rapport à ce cercle est $p_{\mathcal{C}}(O) = OM \times ON' = OM' \times ON$, d'où :

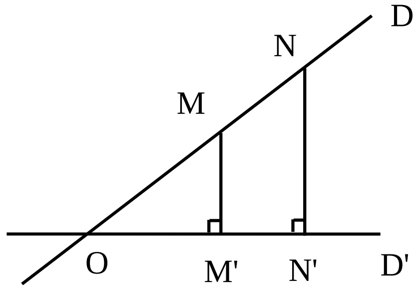
$$\frac{OM'}{OM} = \frac{ON'}{ON}. \blacksquare$$

11.1.3 Sinus d'un angle aigu

Le sinus d'un angle aigu sera bien défini si l'on démontre que le rapport :

$$\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

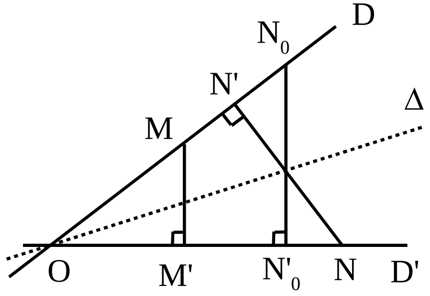
utilisé dans la Section 11.1.1 ne dépend que de l'angle et non du triangle rectangle construit sur cet angle. Dans la figure :



c'est encore le Théorème de Thalès qui nous montre que :

$$\frac{MM'}{OM} = \frac{NN'}{ON}.$$

Il faut aussi penser à l'autre cas où l'on projette un point de D' sur D. La situation est celle du dessin suivant :



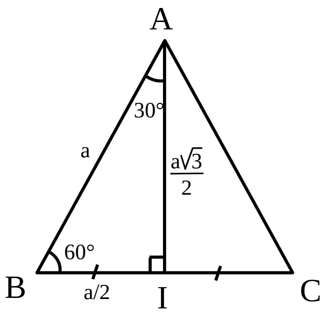
que l'on a complété en dessinant les symétriques N_0 et N_0' de N et N' par rapport à la bissectrice Δ du couple de demi-droites $([OM),[OM'))$, comme dans la section précédente. Par symétrie et grâce au Théorème de Thalès, on obtient :

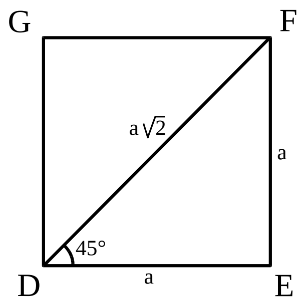
$$\frac{NN'}{ON} = \frac{N_0N_0'}{ON_0} = \frac{MM'}{OM}.$$

La définition du sinus est donc bien justifiée.

11.1.4 Angles remarquables

Les figures ci-dessous, faciles à construire à la règle et au compas, dont les mesures sont faciles à déterminer grâce au Théorème de Pythagore, permettent de trouver les valeurs exactes des lignes trigonométriques des angles de 30°, 45° ou 60°.





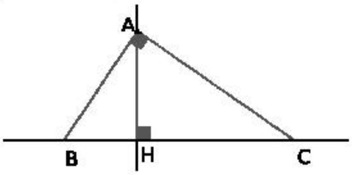
Par exemple $\sin 60° = \dfrac{AI}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}/2}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On obtient le tableau :

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos\alpha$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
$\tan\alpha$	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

11.1.5 Problèmes concrets

La trigonométrie permet de calculer des distances inaccessibles en mesurant des angles et des longueurs. A titre d'exemples, voici quatre exercices intéressants du manuel Sésamaths de 3e [43], dont trois extraits de brevets :

30 *Extrait du Brevet*



AHC est un triangle rectangle en H. La droite passant par A et perpendiculaire à la droite (AC) coupe la droite (HC) en B.
On sait que AH = 4,8 cm et HC = 6,4 cm.

a. Justifier l'égalité : $\widehat{ACH} = 90° - \widehat{HAC}$.

b. Justifier l'égalité : $\widehat{BAH} = 90° - \widehat{HAC}$.

c. Que peut-on en déduire pour les angles $\widehat{ACH}$ et $\widehat{BAH}$?

d. Montrer que $\tan \widehat{ACH} = \frac{3}{4}$.

e. En utilisant le triangle BAH, exprimer $\tan \widehat{BAH}$ en fonction de BH.

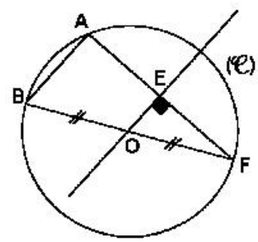
f. Déduire des questions précédentes que BH = 3,6 cm.

g. Calculer la mesure en degrés, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{ACH}$.

38 *Extrait du Brevet*

Sur le schéma ci-dessous :

- ($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O et de diamètre BF = 40 mm ;
- A est un point du cercle ($\mathscr{C}$) tel que AB = 14 mm ;
- La perpendiculaire à la droite (AF) passant par O coupe le segment [AF] en E.



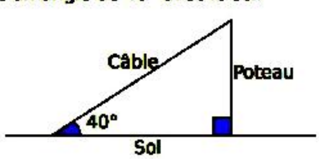
a. Quelle est la nature du triangle ABF ? Justifier la réponse.

b. Calculer la valeur arrondie au dixième de degré de l'angle $\widehat{AFB}$.

c. Calculer la valeur arrondie au millimètre de la longueur EF.

36 *Extrait du Brevet*

Un câble de 20 m de long est tendu entre le sommet d'un poteau vertical et le sol horizontal. Il forme un angle de 40° avec le sol.

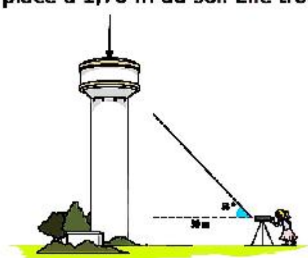


a. Calculer la hauteur du poteau ; donner la valeur approchée au dixième près par défaut.

b. Représenter la situation par une figure à l'échelle 1/200. (Les données de la situation doivent être placées sur la figure.)

43 *Château d'eau*

Juliette mesure l'angle entre l'horizontale et le haut du réservoir d'un château d'eau grâce à un appareil placé à 1,70 m du sol. Elle trouve 58°.



a. Calcule la hauteur du château d'eau arrondie au mètre.

b. La contenance de celui-ci est de 500 m³ d'eau. Calcule le diamètre de la base en considérant que le réservoir du château d'eau est cylindrique. Arrondis au décimètre.

11.1.6 Propriétés

Pour tout angle aigu θ, on obtient facilement l'encadrement $0 \leq \cos\theta \leq 1$ puisque le Théorème de Pythagore appliqué au triangle CAB rectangle en A, tel que $\widehat{C} = \theta$, donne $AC^2 = BC^2 - AB^2 \leq BC^2$, ce qui entraîne :

$$0 \leq \cos\theta = \frac{AC}{BC} \leq 1.$$

De même on a $0 \leq \sin\theta \leq 1$ quel que soit θ. On obtient aussi :

$$\sin^2\widehat{C} + \cos^2\widehat{C} = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = 1$$

d'après le Théorème de Pythagore.

C'est souvent en quatrième qu'a lieu le premier contact des élèves avec le cosinus d'un angle. A ce niveau :
- on ne considère que des angles géométriques aigus ;
- l'objectif principal est d'obtenir et d'utiliser les expressions des sinus et cosinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle ;
- le mot « angle » désigne à la fois le secteur angulaire et la classe des secteurs angulaires superposables, c'est-à-dire isométriques.

11.2 Compléments

11.2.1 Rapports de projection de deux droites

Définition 11.2 *Si deux droites D et D' sont sécantes (au sens large, c'est-à-dire éventuellement égales), et si M et N sont deux points distincts de D, notons M' et N' les projetés orthogonaux de M et N sur D'. Le* ***rapport de projection*** *de D sur D', que l'on note $r(D, D')$, est :*

$$r\left(D, D'\right) = \frac{M'N'}{MN}.$$

Cette définition a un sens car ne dépend pas du choix des points M et N sur la droite D. En effet, si D et D' se coupent en O, le Théorème de Thalès montre que :

$$\forall M, N \in D \quad \frac{M'N'}{MN} = \frac{OM'}{OM} = \frac{ON'}{ON}.$$

On vérifie aussi que :

Théorème 11.2 *On a $r(D, D') = r(D', D)$ quelles que soient les droites sécantes D et D'. Le rapport de projection de deux droites est donc symétrique. Il ne dépend pas de l'ordre dans lequel on énumère les droites, et on peut l'appeler rapport de projection des droites D et D'.*